

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Исследованы сплайн-коллокационные методы решения одномерных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений. Доказана разрешимость методов, а эффективность иллюстрируется численными примерами.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, сплайн-коллокационный метод, теорема Адамара.

Abstract. Spline-collocation methods for solving one-dimensional and many-dimensional hypersingular integral equations are considered. Solvability of these methods are proved. Application of these methods are demonstrated by numerical examples.

Keywords: hypersingular integral, spline-collocation method, Hadamard's theorem.

Введение

Многие задачи механики, электродинамики, физики моделируются одномерными и многомерными гиперсингулярными интегральными уравнениями [1]. Для приближенного решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений предложен ряд численных методов как прямых [2–4], так и основанных на сведении к сингулярным интегродифференциальным уравнениям. Исследования по приближенным методам решения многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений в настоящее время только начинаются [5, 6]. В данной работе исследуются приближенные методы решения одномерных

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{|\tau-t|^3} + c(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (1)$$

и многомерных

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \iint_S \frac{x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2]^{3/2}} = f(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in S, \quad (2)$$

гиперсингулярных интегральных уравнений. В уравнении (2) S – круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Интерес к этим двум конкретным видам гиперсингулярных интегральных уравнений вызван тем, что уравнением (1) моделируется электрический вибратор [7], а уравнением (2) – одна из задач теории разрушения – задача растяжения круглого цилиндра единичными усилиями перпендикулярными к его поверхности. При такой постановке задачи, уравнение (2) сводится к уравнению

$$\iint_S \frac{\sqrt{1-\tau_1^2-\tau_2^2}x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2]^{3/2}} = 1, \quad (t_1, t_2) \in S. \quad (3)$$

В первом разделе даны определения гиперсингулярных интегралов, которые непосредственно используются в работе. Во втором разделе исследуется применение сплайн-коллокационного метода нулевого порядка к решению уравнения (1). В третьем разделе исследуется сплайн-коллокационный метод нулевого порядка для решения уравнения (2). Из приведенных рассуждений следует, что этот метод применим к гиперсингулярным интегральным уравнениям, определенным в произвольных выпуклых областях. В качестве приложения полученного утверждения рассмотрено уравнение (3). В четвертом разделе рассмотрены численные примеры.

1 Определения гиперсингулярных интегралов

Напомним определения гиперсингулярных интегралов, которые являются некоторым обобщением классического определения конечной части интеграла, данного Ж. Адамаром [8].

Определение 1 [8]. Конечной частью интеграла $\int_a^b \frac{f(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}}$, где

$0 < \alpha < 1$, называется предел

$$\int_a^b \frac{f(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} = \lim_{x \rightarrow b} \left[\int_a^x \frac{f(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}} \right]. \quad (4)$$

Здесь $B(x)$ – произвольная функция, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) предел (4) существует; 2) функция $B(x)$ имеет непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка включительно в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор функции $B(x)$ никак не влияет на значение конечной части интеграла Адамара.

Позднее это определение было обобщено Л. А. Чикиным [9] на случай, когда особая точка лежит внутри интервала интегрирования, и данные интегралы рассматривают в смысле главного значения Коши-Адамара.

Определение 2 [9]. Конечной частью интеграла $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}$,

$-1 < c < 1$, $p = 2, 3, \dots$ называется предел

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{c-\eta} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+\eta}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} - \frac{f(\eta)}{\eta^{p-1}} \right],$$

где функция $f(\eta)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) имеет непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка в окрестности точки c ; 2) предел существует.

Дадим определение двумерных гиперсингулярных интегралов, которые непосредственно используются в работе:

$$\iint_{a c}^{b d} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}}, \quad (5)$$

где $a < x < b$, $c < y < d$, $p = 3, 4, \dots$

Введем обозначения: η – достаточно малое вещественное число;
 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$.

Определение 3. Конечной частью интеграла (5) называется предел

$$\iint_{a c}^{b d} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}} = \lim _{\eta \rightarrow 0}\left[\iint_{\Omega_{\eta}^{*}} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}}-\frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}}\right], \quad (6)$$

где $\Omega_{\eta}^{*} = \Omega \setminus R((x, y), \eta)$; $R((x, y), \eta)$ – шар радиуса η с центром в точке (x, y) ; $g(\eta)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) предел (6) существует; 2) функция $g(\eta)$ имеет частные производные, по крайней мере, до $(p-1)$ -го порядка по каждой переменной в окрестности точки (x, y) .

Иногда наиболее предпочтительным для непосредственных вычислений является определение, когда область Ω_{η}^{*} задана в несколько иной форме.

Определение 4. Конечной частью интеграла (5) называется предел

$$\iint_{a c}^{b d} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}} = \lim _{\eta \rightarrow 0}\left[\iint_{\Omega_{\eta}} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}}-\frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}}\right], \quad (7)$$

где $\Omega_{\eta} = \Omega \setminus [x-\eta, x+\eta; y-\eta, y+\eta]$; $g(\eta)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) предел (7) существует; 2) функция $g(\eta)$ имеет частные производные по крайней мере до $(p-1)$ -го порядка по каждой переменной в окрестности точки (x, y) .

Докажем эквивалентность двух последних определений. Для этого достаточно показать, что

$$\left|\iint_{\Omega_{\eta} \setminus \Omega_{\eta}^{*}} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}}\right|=O\left(\frac{1}{\eta^{p-2}}\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\left|\iint_{\Omega_{\eta} \setminus \Omega_{\eta}^{*}} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}}\right| \leq \iint_G \frac{f(\tau_1, \tau_2) d \tau_1 d \tau_2}{\left[(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2\right]^{p / 2}} =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/4} \int_{\eta}^{\eta/\cos\varphi} \frac{\rho}{\rho^p} d\rho d\varphi = 2\pi \frac{\rho^{2-p}}{2-p} \Big|_{\eta}^{\eta/\cos\varphi} = \frac{A}{\eta^{p-2}},$$

где $G = [x - \eta, x + \eta; y - \eta, y + \eta] \setminus R((x, y), \eta)$.

Таким образом, эквивалентность определений 3 и 4 доказана.

Введем также определение гиперсингулярных интегралов для случая, когда особая точка лежит на границе области.

Определение 5. Конечной частью интеграла (6) называется предел

$$\iint_{a,c}^{b,d} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - a)^2 + (\tau_2 - y)^2]^{p/2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\iint_{\tilde{\Omega}_\eta} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - a)^2 + (\tau_2 - y)^2]^{p/2}} - \frac{g(\eta)}{\eta^{p-2}} \right], \quad (8)$$

где $\tilde{\Omega}_\eta = \Omega \setminus R((a, y), \eta)$; $R((a, y), \eta)$ – шар радиуса η с центром в точке (a, y) ; $g(\eta)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) предел (8) существует; 2) функция $g(\eta)$ имеет частные производные по крайней мере до $(p-1)$ -го порядка по каждой переменной в окрестности точки (a, y) .

В случае, если особая точка расположена в вершине прямоугольника $[a, b; c, d]$, может быть введено аналогичное определение.

2 Приближенное решение одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения с особенностью третьего порядка

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t)$, определенной формулой

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t)$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in \Delta_k, \\ 0, & \text{при } t \in [-1, 1] \setminus \Delta_k, \end{cases}$$

$$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-2, \quad \Delta_{N-1} = [t_{N-1}, t_N], \quad t_k = -1 + 2k/N, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Введем еще одну систему узлов $\bar{t}_k = t_k + k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_l) \alpha_l + b(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau = f(\bar{t}_l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Докажем сходимость коллокационного метода. Для этого воспользуемся теоремой Адамара о разрешимости систем линейных алгебраических уравнений [10].

Теорема 1 (Адамара). Если для матрицы A размерности $n \times n$ выполняются неравенства

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то матрица A является невырожденной.

Оценим модули диагональных элементов, принимая во внимание, что данные интегралы рассматриваются в смысле Адамара. Очевидно, что

$$\int_{-1/N}^{1/N} \frac{d\tau}{|\tau|^3} = - \int_{-1/N}^0 \frac{d\tau}{\tau^3} + \int_0^{1/N} \frac{d\tau}{\tau^3} = -N^2, \quad \int_{-1/N}^{1/N} \frac{d\tau}{\tau^2} = -2N.$$

Рассмотрим частный случай, когда коэффициенты $b(\bar{t}_l)$ и $c(\bar{t}_l)$ имеют одинаковый знак, а коэффициент $a(\bar{t}_l)$ – протоположный. Получаем, что:

$$\begin{aligned} & \left| a(\bar{t}_l) + b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \geq \\ & \geq \left| a(\bar{t}_l) + b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| - \left| \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \geq \\ & \geq \left| a(\bar{t}_l) - b(\bar{t}_l)N^2 - 2Nc(\bar{t}_l) \right| - \frac{2}{N}H^* \geq |a(\bar{t}_l)| + |b(\bar{t}_l)|N^2 + 2|c(\bar{t}_l)|N - \frac{2}{N}H^*. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь $H^* = \max |h(t, \tau)|$.

Оценим сумму модулей внедиагональных элементов.

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| b(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| c(\bar{t}_l) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| = \\ & = \left| b(\bar{t}_l) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| + \left| c(\bar{t}_l) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| = \end{aligned}$$

$$= |b(\bar{t}_l)| \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| + |c(\bar{t}_l)| \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right|.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности, используя определение интеграла Адамара. При этом, для краткости, промежуточные вычисления опускаются. Очевидно, при $l \neq 0, N-1$ имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} \right| = \left| - \int_{-1}^{t_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^3} + \int_{t_{l+1}}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^3} \right| = \\ &= \left| N^2 - \frac{1}{2(1 + \bar{t}_l)^2} - \frac{1}{2(1 - \bar{t}_l)^2} \right| = N^2 \left(1 - \frac{1}{2(2l+1)^2} - \frac{1}{2(2N-2l-1)^2} \right). \end{aligned}$$

Как видно, максимальное значение данного выражения достигается при $l = (N-1)/2$ (не ограничивая общности, будем считать, что N нечетно). Тогда получим

$$I_1 \leq N^2 \left(1 - \frac{1}{N^2} \right). \quad (11)$$

Аналогично:

– при $l = 0$ получаем:

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_0|^3} \right| = \left| \int_{t_1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^3} \right| = N^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2N-1)^2} \right|$$

– при $l = N-1$ получаем:

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_{N-1}|^3} \right| = \left| - \int_{-1}^{t_{N-1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^3} \right| = N^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2N-1)^2} \right|$$

Далее оценим следующую сумму:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| = \left| \int_{-1}^{t_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \int_{t_{l+1}}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} \right| = \\ &= \left| 2N - \frac{1}{(1 + \bar{t}_l)} - \frac{1}{(1 - \bar{t}_l)} \right| = N \left(2 - \frac{1}{(2l+1)} - \frac{1}{(2N-2l-1)} \right). \end{aligned}$$

Как видно, максимальное значение данного выражения достигается при $l = (N-1)/2$ (не ограничивая общности, будем считать, что N нечетно). Тогда получим

$$I_2 \leq N \left(2 - \frac{2}{N} \right). \quad (12)$$

Для случая $l = 0$ получаем

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^2} \right| = \left| \int_{t_1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^2} \right| = N \left| 1 - \frac{1}{(2N-1)} \right|.$$

Для случая $l = N-1$ получаем

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^2} \right| = \left| \int_{-1}^{t_{N-1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^2} \right| = N \left| 1 - \frac{1}{(2N-1)} \right|.$$

Далее оценим сумму, содержащую регулярные интегралы:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) d\tau \right| \leq \left(2 - \frac{2}{N} \right) H^*. \quad (13)$$

Здесь $H^* = \max |h(t, \tau)|$.

Теперь, принимая во внимание оценки (10)–(13), покажем, что система аппроксимирующих уравнений однозначно разрешима. Для этого воспользуемся условиями теоремы Адамара, которые будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} |a(\bar{t}_l)| + |b(\bar{t}_l)| N^2 + 2|c(\bar{t}_l)| N - \frac{2}{N} H^* &> |b(\bar{t}_l)| N^2 \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) + \\ &+ |c(\bar{t}_l)| N \left(2 - \frac{2}{N} \right) + \left(2 - \frac{2}{N} \right) H^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$|a(\bar{t}_l)| > 2H^* - \frac{|b(\bar{t}_l)|}{N^2} - \frac{2|c(\bar{t}_l)|}{N}. \quad (14)$$

Таким образом, справедливость соотношения (14) влечет за собой выполнение условия теоремы Адамара. В случае значительного увеличения числа элементов разбиения и соответственно размерности системы аппроксимирующих уравнений неравенство (14) примет вид

$$|a(\bar{t}_l)| > 2H^*.$$

Замечание 1. При рассмотрении одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения вида (1), не содержащего регулярный интеграл, условие (14) будет выполняться автоматически.

Замечание 2. При рассмотрении гиперсингулярного интегрального уравнения (1) при $a(t) \equiv 0$ и $h(t) \equiv 0$ из условия (14) следует его разрешимость при $N \geq 1$.

Выше был рассмотрен частный случай гиперсингулярного интегрального уравнения (1). Интерес к этому случаю вызван тем, что уравнениями вида (1) при $a(t) \equiv 0$ и $h(t) \equiv 0$ описывается уравнение электрического вибратора [7].

В общем случае приближенное решение уравнения (1) ищется в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t)$, коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_l)x_N(\bar{t}_l) + b(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} {}' \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{\psi_k(\tau) d\tau}{|\tau - \bar{t}_l|^3} + c(\bar{t}_l) \sum_{k=0}^{N-1} {}' \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{\psi_k(\tau) d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} h(\bar{t}_l, \tau) x_N(\tau) d\tau = f(\bar{t}_l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k \neq l-v, l-v+1, \dots, l-1, l+1, \dots, l+v-1$. Величина параметра v выбирается из условия выполнения теоремы Адамара об обратимости матриц. Существование такого параметра доказывается по аналогии с работами [2–4].

3 Сплайн-коллокационный метод

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение вида (2). Для приближенного решения этого уравнения покроем область интегрирования S следующей сеткой.

Обозначим через N достаточно большое натуральное число и покроем область $D = [-1, 1]^2$ квадратами $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$, где $v_k = -1 + 2k/N$, $k, l = 0, 1, \dots, N$. Квадраты Δ_{kl} , полностью расположенные в области S , назовем базисными и обозначим их через Δ_{kl}^* . Квадраты Δ_{kl} , не являющиеся базисными, но имеющие с областью S пересечение с мерой больше нуля (это пересечение обозначим через Δ_{kl}^{**}), назовем отмеченными. Каждый из отмеченных квадратов объединяем с тем из базисных квадратов, для которого общая граница с отмеченным квадратом будет наибольшей.

Таким образом, пусть общее число базисных квадратов $\bar{\Delta}_{kl}^*$ (через $\bar{\Delta}_{kl}^*$ обозначен базисный квадрат Δ_{kl}^* , если он не имеет присоединенного отмеченного квадрата, или объединение базисного квадрата Δ_{kl}^* с присоединенной областью Δ_{kl}^{**} , если базисный квадрат граничит с соответствующим от-

меченным квадратом) равно N_0 . Обозначим центры базисных квадратов через v_{kl}^* .

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl} \psi_{kl}^*(t_1, t_2), \quad (15)$$

где $\sum \sum'$ означает суммирование по базисным квадратам;

$$\psi_{kl}^*(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (t_1, t_2) \in \bar{\Delta}_{kl}^*, \\ 0, & \text{при } (t_1, t_2) \notin D \setminus \bar{\Delta}_{kl}^*. \end{cases}$$

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$ будем определять из системы линейных алгебраических уравнений, которая строится следующим образом.

Подставим в уравнение (2) вместо неизвестной функции $x(t_1, t_2)$ ее приближенное значение $x_N(t_1, t_2)$ и приравняем обе части уравнения (2) в точках v_{kl}^* , являющихся центром базисных квадратов. В результате приходим к системе алгебраических уравнений вида

$$a(v_{kl}^*) \alpha_{kl} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij} \iint_{\bar{\Delta}_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - v_k)^2 + (\tau_2 - v_l)^2]^{3/2}} = f(v_{kl}^*), \quad (16)$$

$k, l = 0, 1, \dots, N-1$.

Исследуем сходимость вычислительной схемы (16). Для этого воспользуемся теоремой Адамара об обратимости квадратных матриц.

Прежде всего необходимо оценить снизу интеграл

$$\frac{1}{N} \int_0^1 \frac{1}{N} \int_0^1 \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} \quad (17)$$

и оценить сверху сумму

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij} \iint_{\bar{\Delta}_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - v_k)^2 + (\tau_2 - v_l)^2]^{3/2}}, \quad (18)$$

где $\sum \sum'$ означает суммирование по $(i, j) \neq (k, l)$.

Нетрудно видеть, что сумма (18) имеет наибольшее значение при $(k, l) = \left(\left[\frac{N}{2} \right] + 1, \left[\frac{N}{2} \right] + 1 \right)$ (не ограничивая общности можно считать N нечетным числом).

Таким образом, вместо (18) достаточно оценить сумму

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}}, \quad (19)$$

где $\sum \sum$ означает суммирование по $(i, j) \neq \left(\left[\frac{N}{2}\right] + 1, \left[\frac{N}{2}\right] + 1\right)$.

Приступим к оценке интеграла (17) и суммы (19).

Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} &\geq \iint_{B\left(0, \frac{1}{N}\right)} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\iint_{B\left(0, \frac{1}{N}\right) \setminus B(0, \eta)} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} + \frac{A(\eta)}{\eta} \right] = 2\pi N, \end{aligned} \quad (20)$$

где $B(0, R)$ – шар радиуса R с центром в точке $O(0, 0)$.

С другой стороны,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} \leq \iint_{B(0, \sqrt{2}) \setminus B\left(0, \frac{1}{N}\right)} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} = \int_0^{2\pi\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{N}}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} d\varphi = 2\pi \left(N - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом, если при всех значениях v_{kl}^* , $k, l = 0, 1, \dots, N-1$ выполнены условия

$$\left| 2\pi N b(v_{kl}^*) + a(v_{kl}^*) \right| > 2\pi \left(N - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |b(v_{kl}^*)|, \quad (21)$$

то тем самым выполнены условия теоремы Адамара для системы уравнений (16). Из теоремы Адамара вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (21). Тогда система уравнений (2) имеет единственное решение.

Опишем применение полученного результата к приближенному решению уравнения (3). Введем новую неизвестную функцию

$$u(t_1, t_2) = \sqrt{1 - t_1^2 - t_2^2} x(t_1, t_2)$$

и рассмотрим уравнение

$$\iint_S \frac{u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2]^{3/2}} = 1, (t_1, t_2) \in S. \quad (22)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (2), и к нему применим описанный выше алгоритм.

Замечание. Переход от уравнения (3) к уравнению (22) носит формальный характер. Подобный переход естественно использовать для нахождения решения в области $S_a = R((0,0), 1-a)$, где $a > 0$. При использовании перехода от уравнения (3) к уравнению (22) для нахождения решения в окрестности границы области S возникает значительная погрешность.

4 Численные примеры

Изложенный в разд. 3 сплайн-коллокационный метод был построен для модельного примера – гиперсингулярного интегрального уравнения теории трещин.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1-\tau_1^2-\tau_2^2} x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2]^{3/2}} = -\frac{3\pi^2}{2} t_1, \quad (23)$$

которое имеет решение $x(\tau_1, \tau_2) = t_1$. Здесь S – единичный круг с центром в начале координат.

Сравнение точного и приближенного решения проводилось с учетом весовой функции, т.е. для функций $u(t_1, t_2) = \sqrt{1-t_1^2-t_2^2} x(t_1, t_2)$.

На рис. 1, 2 показана зависимость максимальной абсолютной погрешности от радиуса области, в которой отыскивается решение для уравнения (23).

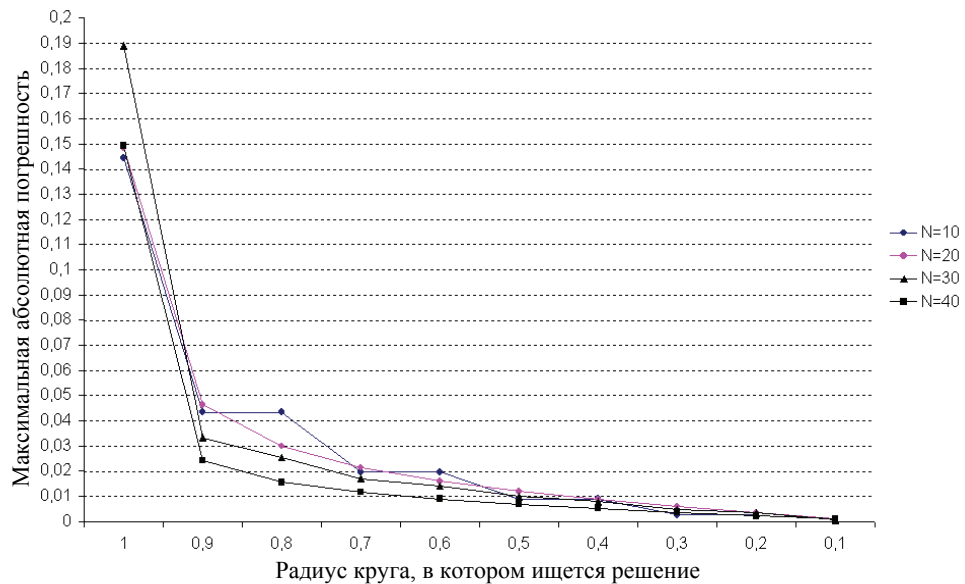


Рис. 1

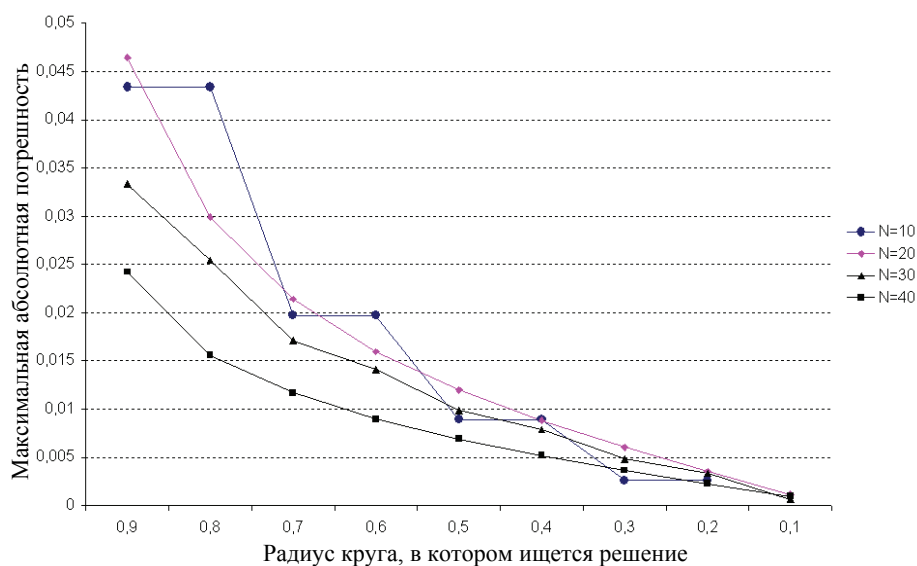


Рис. 2

На рис. 1, 2 приведены решения для различного числа элементов разбиения N , и, как видно из представленных результатов, наибольшая погрешность наблюдается в кольце с внешним радиусом 1 и внутренним радиусом 0,9, ближе к центру области максимальная абсолютная погрешность, как минимум, на порядок меньше. Поэтому на рис. 2 для наглядности результатов показаны те же графики, что и на рис. 1, но в случае, когда радиус области, в котором рассматривается решение, изменяется в пределах от 0,9 до 0,1.

Список литературы

1. **Панасюк, В. В.** Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук — Киев : Наукова думка, 1984. — 344 с.
2. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // International Conference on Computational Mathematics. — Part first. Novosibirsk. — 2004. — P. 411–417.
3. **Бойков, И. В.** Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Вестник Харк. нац. ун-та. — 2007. — № 775. — Вып. 7. — С. 36–49. — (Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления).
4. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения составных особых интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : труды II Международной научно-технической конференции. — Пенза, 2007. — С. 31–36.
5. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский — М. : Янус, 2001. — 508 с.
6. **Оселедец, И. В.** Приближенное обращение матриц / И. В. Оселедец, Е. Е. Тыртышников // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45. — № 2. — С. 315–326.
7. **Бойков И. В.** Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов //

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 4. – С. 94–106.

8. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
 9. **Чикин, Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярные интегральные уравнения / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 1953. – Т. 113. – № 10. – С. 53–105.
 10. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
-

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор,
заведующий кафедрой высшей
и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of Science (in Mathematics),
professor, head of sub-department
of highest and applied mathematics,
Penza State University

Стасюк Богдан Мирославович

кандидат физико-математических наук,
доцент,
кафедра сопротивления материалов,
Национальный университет
«Львівська політехніка»
(г. Львов, Украина)

Stasuk Bogdan Miroslavovich

PhD in Mathematics, associate professor,
sub-department of resistance of materials,
Lvov National Polytechnic University

Тарасов Дмитрий Викторович

ассистент, кафедра высшей
и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет

Tarasov Dmitriy Victorovich

Assistant professor, sub-department
of highest and applied mathematics,
Penza State University

E-mail: tarasovdv@mail.ru

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Приближенное решение некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Б. М. Стасюк, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 100–112.